C. VAN DEN HOEK

BASIS WISKUNDE

derde druk

Meer informatie over deze en andere uitgaven kunt u verkrijgen bij:
Sdu Klantenservice
Postbus 20014
2500 EA Den Haag
tel.: (070) 378 98 80
fax: (070) 378 97 83

© 2002 - 2008 Sdu Uitgevers bv, Den Haag
Academic Service is een imprint van Sdu Uitgevers bv

1e druk 1991
2e druk 1997
3e druk, 1e oplage februari 2002
2e oplage mei 2004
3e oplage april 2007
4e oplage januari 2008

Zetwerk: FITO Prepublishing, Almere
Omslagontwerp: RAM Vormgeving, Asperen
Druk- en bindwerk: Drukkerij Wilco, Amersfoort

ISBN-13: 978 90 395 1 888 5
ISBN-10: 90 395 1 888 2
NUR: 123

Alle rechten voorbehouden. Alle auteursrechten en databankrechten ten aanzien van deze uitgave worden uitdrukkelijk voorbehouden. Deze rechten berusten bij Sdu Uitgevers bv.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet 1912 gestelde uitzonderingen, mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door foatokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voorzover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16 h Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) dient men zich te wenden tot de Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.cedar.nl/pro). Voor het overnemen van een gedeelte van deze uitgave ten behoeve van commerciële doeleinden dient men zich te wenden tot de uitgever.

Hoewel aan de totstandkoming van deze uitgave de uiterste zorg is besteed, kan voor de afwezigheid van eventuele (druk)fouten en onvolledigheden niet worden ingestaan en aanvaarden de auteur(s), redacteur(en) en uitgever deswege geen aansprakelijkheid voor de gevolgen van eventueel voorkomende fouten en onvolledigheden.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the publisher's prior consent.

While every effort has been made to ensure the reliability of the information presented in this publication, Sdu Uitgevers neither guarantees the accuracy of the data contained herein nor accepts responsibility for errors or omissions or their consequences.

Vooraf

Bij de eerste editie

'Basis Wiskunde' is een samenvatting van de leerstof wiskunde van de onderbouw havo/vwo, met uitzondering van meetkunde en goniometrie. Tevens worden twee toepassingen behandeld, namelijk vraag en aanbod en lineair programmeren, die niet tot de leerstof onderbouw havo/vwo behoren. Deze kan men in eerste instantie overslaan.
In tegenstelling tot de meeste in het voortgezet onderwijs gebruikte methoden is 'Basis Wiskunde' lineair qua opbouw, wat een compacte presentatie van de stof tot gevolg heeft. Dit maakt 'Basis Wiskunde' met name geschikt voor deficiëntiecursussen.
'Basis Wiskunde' is tevens de voorkennis voor de in de economische richtingen van het hbo gebruikte serie 'HBO Wiskunde' van dezelfde auteur. Het boek heeft zijn huidige vorm gekregen bij het deeltijd-heao in Den Haag. Daar wordt 'Basis Wiskunde' reeds enige jaren gebruikt om alle studenten op hetzelfde niveau te krijgen.

Bij deze een woord van dank aan collega's en studenten voor hun constructieve bijdragen, in het bijzonder de heren Braaksma, Verweij en Blanken en aan Ingrid Fromberg voor het vele typewerk.

Bij de tweede editie

Veel opgaven zijn toegevoegd.
De hoofdstukken 'Elementair rekenen' en 'Machten' hebben een duidelijker indeling gekregen en het theoretische hoofdstuk 'Relaties en functies' is sterk ingekort.
Op verzoek van een collega is aan het hoofdstuk 'Tweedegraads functies' een aparte paragraaf over kwadraatafsplitsen toegevoegd.

Bij de derde editie

Naast een aantal kleine wijzigingen en aanpassingen zijn op verzoek van collega's de hoofdstukken over rijen en financiële rekenkunde uit 'HBO Wiskunde' als toepassing in de derde druk opgenomen.

Voor op- en aanmerkingen bij deze druk houdt de auteur zich aanbevolen. Reacties graag per e-mail aan c.van.den.hoek@chello.nl

Amsterdam, januari 2002
C. van den Hoek

Inhoud

1	**Verzamelingen**	1
	1.1 Begrip, notatie, eigenschappen	1
	1.2 Doorsnede, vereniging, verschil	3
	1.3 Deelverzameling	5
	1.4 Venn-diagram	7
	1.5 De verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$	11
	1.6 De voorwaardenotatie	14
	1.7 Intervallen	19
2	**Elementair rekenen**	**23**
	2.1 Optellen en aftrekken in $\mathbb{Z}$	23
	2.2 Vermenigvuldigen en delen in $\mathbb{Z}$	26
	2.3 Optellen en aftrekken in $\mathbb{Q}$	29
	2.4 Vermenigvuldigen en delen in $\mathbb{Q}$	32
	2.5 Rekenen met percentages en promillages	35
	2.6 Commutatieve, associatieve en distributieve eigenschap	37
	2.7 Absolute waarde	38
	2.8 Rekenen met letters	39
3	**Wortels**	**44**
	3.1 Wortels, irrationale getallen	44
	3.2 Rekenen met wortels	46
	3.3 Hogeremachtswortels	50
4	**Machten en logaritmen**	**53**
	4.1 Machten met exponent in $\mathbb{N}^+$	53
	4.2 Rekenregels voor machten	55
	4.3 Machten met negatieve of gebroken exponent of met exponent 0	57
	4.4 Logaritmen	62
5	**Eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden**	**67**
	5.1 Vergelijking, ongelijkheid, oplossingsverzameling	67
	5.2 Regels voor het oplossen van vergelijkingen	69
	5.3 Systematisch oplossen van een eerstegraads vergelijking	70
	5.4 Valse en identieke vergelijkingen	73
	5.5 Gebroken vergelijkingen	75
	5.6 Eerstegraads ongelijkheden	78

6 **Relaties en functies** **82**
6.1 Coördinaten 82
6.2 Het product van twee verzamelingen 84
6.3 Relaties en functies 87

7 **Eerstegraads functies** **90**
7.1 Eerstegraads functies en de grafiek 90
7.2 De richtingscoëfficiënt 95
7.3 De algemene gedaante van de eerstegraads functie 99
7.4 Verticale lijnen, de vergelijking van een lijn 101
7.5 Snijpunten van lijnen, stelsels vergelijkingen 103
7.6 De vergelijking van een lijn door twee gegeven punten 108
7.7 De grafiek van een eerstegraads ongelijkheid 111

8 **De distributieve eigenschap en ontbinden in factoren** **116**
8.1 De distributieve eigenschap 116
8.2 Merkwaardige producten 118
8.3 Buiten haken halen 121
8.4 Ontbinden in factoren 123

9 **Tweedegraads vergelijkingen en ongelijkheden** **127**
9.1 Tweedegraads vergelijkingen met ontbinden in factoren 127
9.2 De *abc*-formule 132
9.3 Gebroken vergelijkingen 137
9.4 Tweedegraads ongelijkheden 138
9.5 Gebroken ongelijkheden 143

10 **Tweedegraads functies** **148**
10.1 Tweedegraads functies en hun grafiek 148
10.2 Berekening van nulpunten en top 150
10.3 De discriminant en de ligging van de grafiek 156
10.4 Snij- en raakpunten van parabolen onderling en van een parabool en een lijn 157
10.5 Verschuiven en spiegelen van grafieken 163
10.6 Kwadraat afsplitsen 170

11 **Toepassing 1: Vraag en aanbod** **174**
11.1 Vraagfuncties 174
11.2 Aanbodfuncties en marktevenwicht 176
11.3 Aanbodoverschot, vraagoverschot 180
11.4 Belasting en subsidie 183

12 Toepassing 2: Lineair programmeren **191**
12.1 De doelstellingsfunctie 191
12.2 De restricties en het optimum 194

13 Toepassing 3: Rijen en financiële rekenkunde **202**
13.1 De rekenkundige rij 202
13.2 De meetkundige rij 206
13.3 Samengestelde interest 210
13.4 Aanvangswaarde, contante waarde 212
13.5 Periodieke betalingen 214
13.6 Periodieke uitkeringen 216
13.7 Annuïteiten 218
13.8 Omrekenen van rente 220
13.9 Overzicht formules financiële rekenkunde 222

Antwoorden **223**

Index **257**

1 Verzamelingen

Verzamelingen worden in de wiskunde niet gebruikt om berekeningen te maken, maar om zaken duidelijk te noteren en complexe begrippen te definiëren. In ieder modern wiskundeboek zal men de verzamelingsnotatie aantreffen. Het is daarom nodig deze notatie te begrijpen en ermee te kunnen manipuleren.

1.1 Begrip, notatie, eigenschappen

Een verzameling is een aantal dingen bij elkaar. Deze dingen, elementen van de verzameling genoemd, kunnen concrete voorwerpen of abstracte zaken zijn.
Verzamelingen kunnen worden genoteerd door de dingen die bij de verzameling horen gescheiden door komma's op te schrijven, en het geheel tussen accolades te plaatsen.
Een voorbeeld van een verzameling met concrete elementen is de verzameling van voorwerpen op het bureau: {boek, pen, vloeiblad, kop koffie}.
Een voorbeeld van een verzameling met abstracte elementen is de verzameling van de gehele getallen tussen 5 en 10: $\{6, 7, 8, 9\}$.
In dit boek beperken we ons voorlopig, op één uitzondering na, tot verzamelingen waarvan de elementen getallen zijn (zie opmerking 2).

We bekijken nog eens de verzameling van de gehele getallen tussen 5 en 10. Deze noteerden we als $\{6, 7, 8, 9\}$. We zouden deze verzameling ook kunnen noteren als $\{7, 6, 9, 8\}$ of als $\{9, 8, 7, 6\}$. Natuurlijk zijn dit dezelfde verzamelingen, want ze zijn alle drie de verzameling van gehele getallen tussen 5 en 10.

Uit dit voorbeeld kunnen twee conclusies getrokken worden:

- De volgorde waarin we de elementen van een verzameling opschrijven doet niet terzake. (Bij getalverzamelingen gebruikelijk van klein naar groot).
- Verzamelingen die dezelfde elementen bevatten, zijn aan elkaar gelijk.

We bekijken nogmaals de verzameling $\{6, 7, 8, 9\}$; 7 is een element van deze verzameling. Dit wordt genoteerd als $7 \in \{6, 7, 8, 9\}$.

element $\in$ betekent: is *element* van.

11 is geen element van deze verzameling. Dit wordt genoteerd als $11 \notin \{6, 7, 8, 9\}$.

geen element $\notin$ betekent: is *geen element* van.

Er is een bijzondere verzameling, de verzameling die geen elementen bevat. Bijvoorbeeld de verzameling van de positieve getallen die kleiner zijn dan 0.

lege verzameling De verzameling die geen elementen bevat wordt de *lege verzameling* genoemd. Er is een speciaal symbool voor namelijk $\emptyset$.

Opmerking 1

$\emptyset = \{0\}$?

Nee, want $\emptyset$ bevat geen elementen en $\{0\}$ bevat 1 element, namelijk het getal 0. $\emptyset$ en $\{0\}$ bevatten niet dezelfde elementen en zijn daarom niet aan elkaar gelijk. Dus $\emptyset \neq \{0\}$.

ongelijk $\neq$ betekent: is *ongelijk* aan.

Opmerking 2

$\emptyset = \{\emptyset\}$?

Nee, want $\emptyset$ bevat geen elementen en $\{\emptyset\}$ bevat 1 element, namelijk de lege verzameling. $\emptyset$ en $\{\emptyset\}$ bevatten niet dezelfde elementen en zijn daarom niet aan elkaar gelijk. Dus $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Merk op, dat het element van de verzameling $\{\emptyset\}$ geen getal is, maar een verzameling.

Opmerking 3

$\emptyset = \{\ \}$?

Ja, want $\emptyset$ en $\{\ \}$ bevatten dezelfde elementen, te weten geen. Dus $\emptyset = \{\ \}$. De notatie $\{\ \}$ voor de lege verzameling is echter niet gebruikelijk.

Opgaven

1. Vul in $\in$ of $\notin$.

a. $1 \ldots \{1,2,3\}$
b. $0 \ldots \emptyset$
c. $4 \ldots \{1,2,3\}$
d. $0 \ldots \{0\}$
e. $1 \ldots \{1\}$
f. $3 \ldots \{1,2,6\}$

1.2 Doorsnede, vereniging, verschil

Uit de rekenkunde kennen we onder andere de bewerkingen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen. We geven deze bewerkingen of operaties weer met de symbolen $+$, $-$ en $\times$. (het symbool $\times$ wordt gebruikt voor vermenigvuldiging om verwarring met de letter x te voorkomen).

operator De symbolen $+$, $-$ en $\times$ heten *operatoren*.
De operatoren $+$, $-$ en $\times$ werken op getallen. Ze laten bij twee getallen een nieuw getal horen. Als we bijvoorbeeld de operator $+$ op de getallen 2 en 3 loslaten ontstaat het getal 5. We noteren dit op de bekende wijze: $2 + 3 = 5$.

Ook met verzamelingen zijn bewerkingen mogelijk, te weten doorsnede, vereniging en verschil. We geven deze bewerkingen weer met de symbolen $\cap$, $\cup$ en $\setminus$.
De operatoren $\cap$, $\cup$ en $\setminus$ werken op verzamelingen. Ze maken van twee verzamelingen een nieuwe verzameling.
Van de operatoren $+$, $-$ en $\times$ kennen we de betekenis al. Van $\cap$, $\cup$ en $\setminus$ moet dat nog gedefinieerd worden.

✓ Definitie *doorsnede*:
A en B zijn verzamelingen.
doorsnede $A \cap B$ is de verzameling die alle gemeenschappelijke elementen van A en B bevat.

Voorbeelden

$\{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5,6\} = \{3,4\}$
$\{1,2,3,4\} \cap \{5,6,7,8\} = \emptyset$
$\{1,2,3,4\} \cap \emptyset = \emptyset$

✓ Definitie *vereniging*:
A en B zijn verzamelingen.
vereniging $A \cup B$ is de verzameling die alle elementen van A en/of B bevat.

Voorbeelden

$\{1,2,3,4\} \cup \{5,6,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
$\{1,2,3,4\} \cup \{3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
$\{1,2,3,4\} \cup \emptyset = \{1,2,3,4\}$

Bij het tweede voorbeeld zou men de neiging kunnen hebben om te schrijven $\{1,2,3,4\} \cup \{3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,3,4,5,6\}$. Het is echter afspraak om elementen slechts één maal te noteren.

✓ Definitie *verschil*:
A en B zijn verzamelingen.
verschil $A \setminus B$ is de verzameling die alle elementen van A die geen element van B zijn, bevat.

Voorbeelden

$\{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5,6\} = \{1,2\}$
$\{1,2,3,4\} \setminus \emptyset = \{1,2,3,4\}$
$\{1,2,3,4\} \setminus \{1,2,3,4\} = \emptyset$

In dit boek kennen de verzamelingsbewerkingen geen onderlinge prioriteiten. Dit in tegenstelling tot de bewerkingen van getallen waar bijvoorbeeld vermenigvuldigen voor optellen gaat. Dat betekent dat verzamelingsbewerkingen worden uitgevoerd in de volgorde waarin ze geschreven staan (van links naar rechts). Willen we een andere volgorde, dan kan dat met haken worden aangegeven.

Bijvoorbeeld $\{0,1,2\} \setminus \{1,2\} \cup \{2,3\}$ wordt van links naar rechts uitgewerkt. Dus eerst het verschil en dan de vereniging.
$\{0,1,2\} \setminus \{1,2\} \cup \{2,3\} = \{0\} \cup \{2,3\} = \{0,2,3\}$

Echter in $\{0,1,2\} \setminus (\{1,2\} \cup \{2,3\})$ wordt eerst de vereniging bepaald.
$\{0,1,2\} \setminus (\{1,2\} \cup \{2,3\}) = \{0,1,2\} \setminus \{1,2,3\} = \{0\}$

Opgaven

2. $A = \{0,1,2,3,4\}$; $B = \{2,3,4,5,6\}$. Geef:

a. $A \cap B$
b. $A \cup B$
c. $A \setminus B$
d. $B \setminus A$

3. Als opgave 2 met $A = \{0,1,2,3,4\}$ en $B = \emptyset$.

4. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Geef:

a. $A \cap B \cap C$
b. $A \cup B \cup C$
c. $A \cap B \cup C$
d. $A \cap (B \cup C)$
e. $A \cup B \cap C$
f. $A \cup (B \cap C)$
g. $A \cup B \setminus C$
h. $A \setminus (B \cup C)$
i. $A \cup (B \setminus C)$
j. $A \cap (B \setminus C)$
k. $A \setminus B \setminus C$
l. $A \setminus (B \setminus C)$

1.3 Deelverzameling

We bekijken de verzamelingen $\{1, 2\}$ en $\{1, 2, 3, 4\}$.
De verzameling $\{1, 2\}$ is een gedeelte van de verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$. Dit wordt genoteerd als $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

deelverzameling

$\subset$ betekent: is een *deelverzameling* van.

Definitie deelverzameling:
A en B zijn verzamelingen.
$A \subset B$ betekent: ieder element van A is ook een element van B of $A = \emptyset$.

geen deelverzameling

Als A geen deelverzameling is van B noteren we dit als $A \not\subset B$.
$\not\subset$ betekent: is *geen deelverzameling* van.

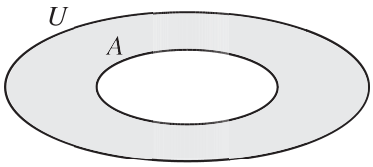
Voorbeelden

$\{1, 2, 3, 4\} \not\subset \{1, 2\}$
$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$
$\emptyset \subset \{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3, 4\} \not\subset \emptyset$

Uit de definitie van deelverzameling kunnen we concluderen:
- Iedere verzameling is deelverzameling van zichzelf ($A \subset A$).
- De lege verzameling is deelverzameling van iedere verzameling ($\emptyset \subset A$) en in het bijzonder geldt: $\emptyset \subset \emptyset$.

complement

Als A een deelverzameling is van U, $A \subset U$, dan verstaan we onder $\overline{A}$, het *complement* van A in U, de verzameling van alle elementen van U die geen element van A zijn. Dus $\overline{A} = U \setminus A$.



Figuur 1.1 $\overline{A}$ is gerasterd. Voor een uitleg van de figuur, zie paragraaf 1.4.

Een bijzondere eigenschap: $\overline{\overline{A}} = A$.
Want $\overline{\overline{A}} = U \setminus \overline{A} = U \setminus (U \setminus A) = A$.

De operatie complement nemen, komt voornamelijk voor in de kansrekening.

Opmerking 1

Het begrip deelverzameling is ruimer dan misschien in eerste instantie gedacht wordt. Immers, in het normale spraakgebruik is een deel kleiner dan het geheel, terwijl een verzameling deelverzameling van zichzelf is.

Opmerking 2

$\subset$ is geen operator als $\cap$, $\cup$ en $\setminus$. De operatoren $\cap$, $\cup$ en $\setminus$ maken van twee verzamelingen een nieuwe verzameling. $\subset$ doet dit niet. $\subset$ is een bewering. Als we opschrijven: '$A \subset B$', dan komt daar niet een verzameling uit, maar we kunnen zeggen 'waar of niet waar'.

Opmerking 3

In de definitie van deelverzameling: '$A \subset B$ betekent: ieder element van A is ook element van B of $A = \emptyset$', komt '$A = \emptyset$' enigszins uit de lucht vallen. Dat $\emptyset$ deelverzameling van iedere verzameling is, kan worden ingezien als we uitgaan van de definitie van 'is geen deelverzameling'.
A en B zijn verzamelingen.
$A \not\subset B$ betekent: er is tenminste één element in A dat geen element is van B.
Nu is onmiddellijk in te zien dat $\emptyset \not\subset A$ onjuist is. Immers het element van $\emptyset$, dat geen element van A is, bestaat niet.
Dus $\emptyset \subset A$.

Opgaven

5. Noteer alle deelverzamelingen van $\{1, 2, 3\}$. Het zijn er 8.

6. A en B zijn verzamelingen. Welke van de volgende beweringen zijn waar voor iedere keuze van A en B?

a. $A \subset A$
b. $A \subset \emptyset$
c. $\emptyset \subset A$
d. $A \subset (A \cap B)$
e. $A \not\subset (A \cap A)$
f. $A \subset (A \setminus B)$
g. $(A \setminus B) \not\subset A$
h. $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

7. $A = \{1, 2, 3\}$; $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. $\overline{A}$ is het complement van A in U. Geef:

a. $\overline{A}$
b. $U \setminus A$
c. $U \setminus \overline{A}$
d. $U \cap A$
e. $U \cup A$
f. $\overline{\overline{A}}$
g. $\overline{U \cap A}$
h. $\overline{U \cup A}$

8. Verzameling A heeft 7 elementen en B heeft er 5.

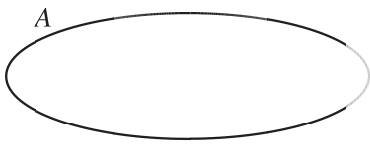
In de tabel dienen de maximale en minimale aantallen elementen in $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ en $B \setminus A$ ingevuld te worden.

	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$
max.				
min.				

1.4 Venn-diagram

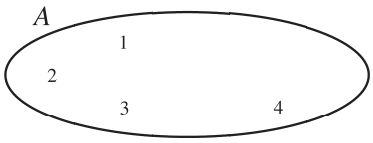
Venn-diagram

Een *Venn-diagram* is een figuur, waarin verzamelingen en de operaties $\cap$, $\cup$, $\setminus$ en de bewering 'deelverzameling' aanschouwelijk gemaakt kunnen worden. In een Venn-diagram wordt bijvoorbeeld de verzameling A weergegeven als:



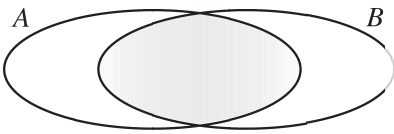
Figuur 1.2 Venn-diagram van de verzameling A

De elementen van A, als A niet leeg is, worden geacht zich binnen de ellips te bevinden. De ellipsvorm is niet noodzakelijk; iedere andere vorm die een vlakdeel begrenst, mag ook.
Als ook nog bekend is welke elementen A bevat, bijvoorbeeld $A = \{1, 2, 3, 4\}$, wordt de verzameling A als volgt weergegeven:

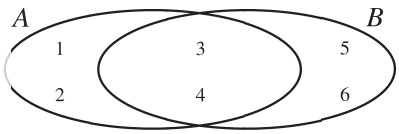


Figuur 1.3 Venn-diagram van $A = \{1, 2, 3, 4\}$

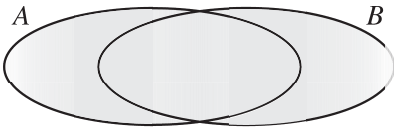
Als in een Venn-diagram de verzamelingen A en B worden weergegeven waarbij A en B elkaar overlappen, kunnen we in die figuur ook $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ en $B \setminus A$ weergeven.
De linkerfiguur geeft de situatie weer, zonder dat de elementen van A en B bekend zijn. Rechts is uitgegaan van $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{3, 4, 5, 6\}$.



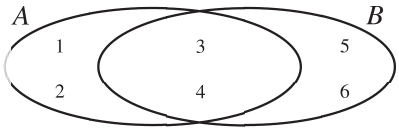
$A \cap B$ is gerasterd



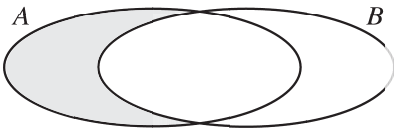
$A \cap B = \{3, 4\}$



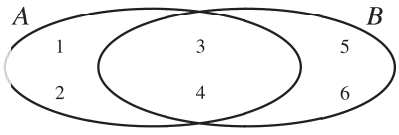
$A \cup B$ is gerasterd



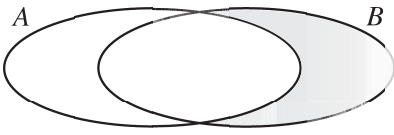
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



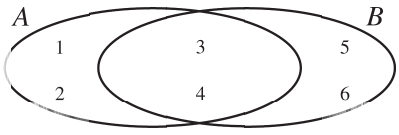
$A \setminus B$ is gerasterd



$A \setminus B = \{1, 2\}$



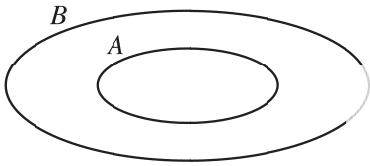
$B \setminus A$ is gerasterd



$B \setminus A = \{5, 6\}$

Figuur 1.4

Als A een deelverzameling is van B kunnen we dat in een Venn-diagram als volgt weergeven:

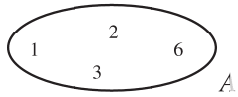


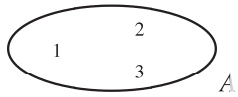
Figuur 1.5 $A \subset B$

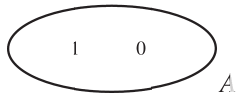
Ook figuur 1.1 waarin $\overline{A}$, het complement van A in U, wordt weergegeven, is een Venn-diagram.

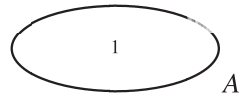
Opgaven

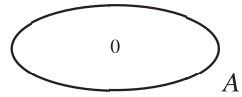
9. Noteer de bij het Venn-diagram behorende verzameling A.

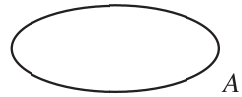
a. 

b. 

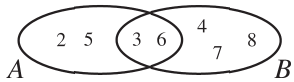
c. 

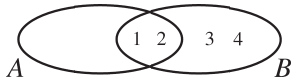
d. 

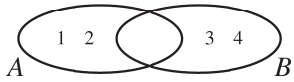
e. 

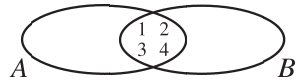
f. 

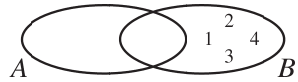
10. Noteer de bij het Venn-diagram behorende verzamelingen A en B.

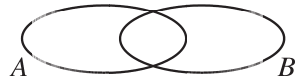
a. 

b. 

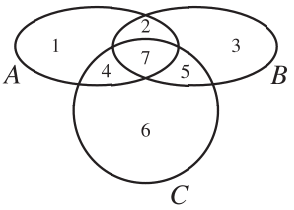
c. 

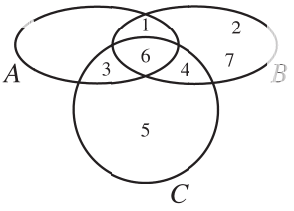
d. 

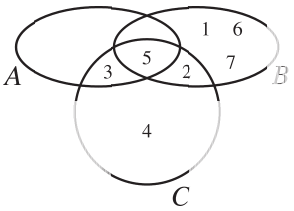
e. 

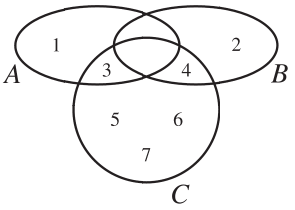
f. 

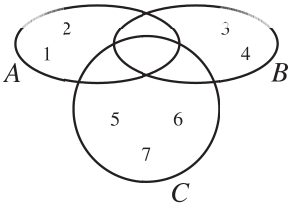
11. Noteer de bij het Venn-diagram behorende verzamelingen A, B en C.

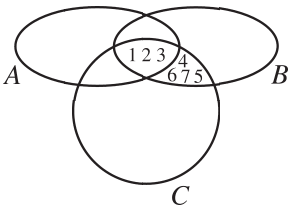
a.


b.


c.


d.


e.


f.


12. Teken het Venn-diagram van de volgende verzameling(en):

a. $A = \{0, 1, 2, 3, 8\}$
b. $A = \{0\}$
c. $A = \{1, 3, 5, 7\}$
   $B = \{1, 2, 3, 4\}$
d. $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$
   $B = \{1, 3, 6, 7, 9\}$
e. $A = \{2, 4, 6, 8\}$
   $B = \emptyset$
f. $A = \emptyset$
   $B = \{0\}$
g. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
   $B = \{1, 2, 5, 6\}$
   $C = \{1, 3, 7, 8\}$
h. $A = \{1, 2, 5, 6\}$
   $B = \{1, 6, 7, 8\}$
   $C = \{1, 2, 7, 8, 9\}$
i. $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
   $B = \emptyset$
   $C = \{1, 2, 8, 9\}$
j. $A = \emptyset$
   $B = \{0\}$
   $C = \{0, 1\}$
k. $A = \{3, 4, 5\}$
   $B = \emptyset$
   $C = \emptyset$

13. Teken in een Venn-diagram de verzamelingen A, B en C en markeer:

a. $A \cap B \cap C$
b. $A \cap B \setminus C$
c. $A \cap (B \setminus C)$
d. $A \cup B \setminus C$
e. $A \cup B \cap C$
f. $A \cup (B \cap C)$

1.5 De verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

In de wiskunde zijn een aantal speciale getalverzamelingen gedefinieerd. Deze verzamelingen hebben de notatie $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ gekregen.

natuurlijke getallen

$\mathbb{N}$: de verzameling van de *natuurlijke getallen*.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. '$\ldots$' betekent hier 'enzovoort'.
We zien dat $\mathbb{N}$ een verzameling is met onbeperkt veel elementen.

gehele getallen

$\mathbb{Z}$: de verzameling van de *gehele getallen*.
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
We zien dat de verzameling $\mathbb{Z}$ ontstaat door aan $\mathbb{N}$ de negatieve gehele getallen toe te voegen. Anders gezegd:
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup$ 'de verzameling van de negatieve gehele getallen'.

rationale getallen

$\mathbb{Q}$: de verzameling van de *rationale getallen*.
$\mathbb{Q}$ ontstaat door aan $\mathbb{Z}$ de verzameling van de gewone breuken, dus breuken als $1\frac{7}{12}$ en $-7\frac{5}{16}$ toe te voegen.
Dus $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup$ 'de verzameling van gewone breuken'.

De uitdrukking gewone breuk doet ons vermoeden dat er ook ongewone breuken bestaan. Als we de breuken van $\mathbb{Q}$ als decimale breuk schrijven zijn er twee mogelijkheden.

- De breuk heeft eindig veel decimalen.

  Als voorbeeld werken we $5\frac{3}{16}$ om tot een decimale breuk.

  16/3,0000\0,1875 dus $5\frac{3}{16} = 5{,}1875$
  16
  140
  128
  120
  112
  80
  80
  0

  Als we $5\frac{3}{16}$ als decimale breuk schrijven, heeft deze breuk eindig veel decimalen.

- De breuk heeft onbeperkt veel decimalen.

  Als voorbeeld werken we $-3\frac{2}{7}$ om tot een decimale breuk.

  7/**2,0**00000000\0,285714**2** enzovoort.

  14
  60
  56
  40
  35
  50
  49
  10
  7
  30
  28
  20 ⇐ nu komt dezelfde serie resten
  14
  6

  Dus $-3\frac{2}{7} = -3{,}285714\,285714\,285714$ enzovoort.
  De decimalen 285714 worden steeds herhaald. Dit wordt genoteerd als $-3\frac{2}{7} = -3{,}\dot{2}85714\dot{}$. Hiermee wordt bedoeld dat de serie cijfers 285714 zich herhaalt. Dergelijke breuken heten *repeterend.*

repeterende breuk

Uit het voorgaande kan geconcludeerd worden dat de elementen van $\mathbb{Q}$, als ze als decimale breuk geschreven worden, of eindig veel decimalen hebben, of repeterend zijn.
Er zijn ook decimale breuken met onbeperkt veel decimalen die niet repeterend zijn, bijvoorbeeld:

0,1 0 11 00 111 000 1111 0000 11111 00000 111111, enzovoort

Hier is wel sprake van regelmaat in de decimalen, maar niet van een vaste serie zich herhalende decimalen. Dit getal is dus geen element van $\mathbb{Q}$. Een ander voorbeeld is het getal π, dat onder meer voorkomt in de formule *omtrek cirkel* $= \pi \times$ *middellijn cirkel.* $\pi = 3{,}141592653589\ldots\ldots$
Hier is sprake van een onbeperkt aantal decimalen zonder dat enige regelmaat bestaat. Getallen als 0,1 0 11 00 111 0000 1111$\ldots\ldots\ldots$ en π heten *irrationaal.*

irrationale getallen

reële getallen

$\mathbb{R}$: de verzameling van de *reële* getallen.
$\mathbb{R}$ ontstaat door aan de verzameling $\mathbb{Q}$ de irrationale getallen toe te voegen.
Dus $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$ 'de verzameling van de irrationale getallen'.

Als we ons de getallen voorstellen als liggend op een lijn (een zogeheten getallenlijn), dan geldt:

Figuur 1.6 De getallenlijn

✓ Bij ieder punt van de getallenlijn hoort precies 1 element van $\mathbb{R}$ en ieder element van $\mathbb{R}$ wordt weergegeven door precies 1 punt op de getallenlijn.

Samenvatting:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup$ 'de verzameling van de negatieve gehele getallen'
$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup$ 'de verzameling van de gewone breuken'
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$ 'de verzameling van de irrationale getallen'

Merk op: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Soms wordt door het gebruik van een bovenindex '$^+$' of '$^-$' een getalverzameling beperkt tot alleen positieve of alleen negatieve elementen. Zo is $\mathbb{R}^+$ de verzameling van de positieve getallen van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$.

neutraal getal

N.B. Het getal 0 is niet negatief en ook niet positief. Het getal 0 wordt *neutraal* genoemd. Dus geldt bijvoorbeeld: $0 \notin \mathbb{Z}^+$.

Opgaven

14. Teken de verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ in een Venn-diagram en arceer de verzameling van de irrationale getallen.

15. Vul in $\in$ of $\notin$:

	1	-1	2	0	$-\frac{1}{2}$	π
$\mathbb{N}$						
$\mathbb{Z}$						
$\mathbb{Q}$						
$\mathbb{R}$						

16. Geef een kortere notatie voor:

a. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$
b. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$
c. $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}$
d. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$
e. $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$
f. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
g. $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$
h. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

17. Geef aan of de volgende beweringen waar of onwaar zijn en waarom:

a. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
b. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
c. $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$
d. $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$
e. $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$
f. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$

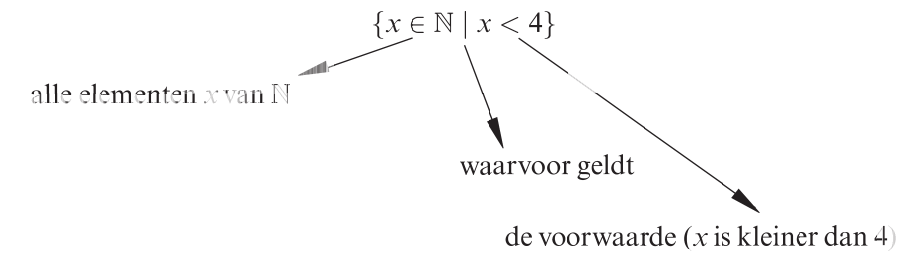
18. Als opgave 17.

a. $-3{,}234 \in \mathbb{N}$
b. $-3{,}234 \notin \mathbb{Z}$
c. $0 \in \mathbb{Z}^+$
d. $-3{,}234 \in \mathbb{Q}$
e. $-3{,}234 \notin \mathbb{R}$
f. $0 \in \mathbb{R}^-$

1.6 De voorwaardenotatie

In paragraaf 1.1 werd gesteld dat verzamelingen genoteerd kunnen worden door tussen accolades de elementen, gescheiden door komma's, op te schrijven. We noemen deze notatie de notatie door middel van opsomming van de elementen. Het is niet altijd mogelijk een verzameling te noteren door middel van opsomming. Voorbeelden zijn de verzameling $\mathbb{R}$ en de verzameling van de rationale getallen. Een andere methode om verzamelingen te noteren is door middel van een voorwaarde, waaraan de elementen van de verzameling moeten voldoen.

Voorbeeld



Figuur 1.7 De voorwaardenotatie

kleiner dan $<$ betekent: *kleiner dan*;
groter dan $>$ betekent: *groter dan*.

De verzameling van het voorbeeld kan ook door opsomming genoteerd worden. $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$
Een verzameling die niet door opsomming genoteerd kan worden, is de volgende:
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$
Spreek uit: alle elementen x van $\mathbb{R}$, waarvoor geldt: $x < 4$.

open bewering Een voorwaarde wordt ook wel een *open bewering* genoemd.
Open, omdat nog niet bekend is of de bewering waar is. Dit is pas bekend als voor de onbekende of variabele x een waarde gekozen wordt. Zo is $x < 4$ een open bewering en $5 < 4$ een (gesloten) bewering (onwaar).
De voorwaarde, die de elementen van een verzameling bepaalt, kan enkelvoudig zijn, bijvoorbeeld $x < 4$, of samengesteld, bijvoorbeeld $x < 4 \wedge x > 0$ of bijvoorbeeld $x < 3 \vee x = 5$.

EN $\wedge$ betekent *EN*.
OF $\vee$ betekent *OF* (het logisch OF; zie opmerking 1).

Als V en W voorwaarden of beweringen zijn dan geldt:
$V \wedge W$ is slechts dan waar, als V en W beide waar zijn.
$V \vee W$ is slechts dan waar, als V en/of W waar is.

Weergegeven is een zogeheten waarheidstabel:
(w = waar; o = onwaar)

V	W	$V \wedge W$
w	w	w
w	o	o
o	w	o
o	o	o

V	W	$V \vee W$
w	w	w
w	o	w
o	w	w
o	o	o

Verzamelingen genoteerd door middel van een samengestelde voorwaarde zijn onder andere:

$\{x \in \mathbb{N} \mid x < 3 \vee x = 5\} = \{0, 1, 2, 5\}$
$\{x \in \mathbb{N} \mid x < 3 \wedge x = 5\} = \emptyset$
$\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 3 \wedge x > -3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Evenals voor de verzamelingsbewerkingen doorsnede, vereniging en verschil, zijn ook voor de zogeheten logische bewerkingen en en of (zie opmerking 2) in dit boek geen prioriteiten gedefinieerd. Dat betekent, dat $\wedge$- en $\vee$-operaties worden uitgevoerd in de volgorde waarin ze geschreven staan (van links naar rechts). Willen we een andere volgorde, dan kan dat door middel van haken worden aangegeven.

Voorbeelden

$2 < 3 \vee 2 \in \mathbb{N} \wedge 2 = 3$ is onwaar
$\quad \mathrm{w} \quad \vee \quad \mathrm{w} \quad \wedge \quad \mathrm{o} \qquad = \mathrm{w} \wedge \mathrm{o} = \mathrm{o}$

$2 < 3 \vee (2 \in \mathbb{N} \wedge 2 = 3)$ is waar
$\quad \mathrm{w} \quad \vee (\quad \mathrm{w} \quad \wedge \quad \mathrm{o} \quad) \quad = \mathrm{w} \vee \mathrm{o} = \mathrm{w}$

Een bijzonder voorbeeld van een samengestelde voorwaarde is $x \leq 5$.

- $\leq$ betekent: kleiner dan of gelijk aan.
  $x \leq 5$ is een kortere notatie voor: $x < 5 \vee x = 5$.
- $\geq$ betekent: groter dan of gelijk aan.
  $x \geq 5$ is een kortere notatie voor: $x > 5 \vee x = 5$.

Een ander voorbeeld is $-3 < x \leq 3$.

- $-3 < x \leq 3$ is een kortere notatie voor: $-3 < x \wedge x \leq 3$.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 3\} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \wedge x \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \wedge (x < 3 \vee x = 3)\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

In woorden: $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 3\}$ is de verzameling van alle gehele getallen tussen -3 en 3, exclusief -3 en inclusief 3.

Met behulp van de notatie door middel van voorwaarde kan de betekenis van de bewerkingen doorsnede, vereniging en verschil gedefinieerd worden.

A en B zijn verzamelingen:

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Uitgaande van de verzameling $\mathbb{N}$ kunnen ook de verzamelingen $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ met de voorwaardenotatie gedefinieerd worden. Voor $\mathbb{R}$ is dat niet mogelijk.

- $\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b} \wedge a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

logisch of

Opmerking 1

Het teken '$\vee$', het '*logisch OF*' geheten, heeft een andere betekenis dan 'of' in de Nederlandse taal gebruikelijk heeft. Het Nederlands 'of' (afgekort NO) is een 'wederzijds uitsluitend of'. Daarmee wordt bedoeld: als V en W beweringen zijn dan is V NO W slechts dan waar, als van V en W één van beide waar is. Het onderscheid is duidelijk als we de waarheidstabellen van het Nederlands of (NO), en het logisch OF ($\vee$) naast elkaar zetten.

V	W	V NO W
w	w	o
w	o	w
o	w	w
o	o	o

V	W	$V \vee W$
w	w	w
w	o	w
o	w	w
o	o	o

Opmerking 2

Soms rijst het misverstand dat de operatoren $\wedge$ en $\cap$ en $\vee$ en $\cup$ dezelfde betekenis hebben. Dit is niet het geval. De operatoren $\cap$ en $\cup$ zijn verzamelingsoperatoren. Ze maken van twee verzamelingen een nieuwe verzameling. De operatoren $\wedge$ en $\vee$ zijn logische operatoren. Ze maken van twee voorwaarden of beweringen een nieuwe (samengestelde) voorwaarde of bewering.

Opgaven

19. Welke van de volgende samengestelde beweringen zijn waar?

a. $2 \leq 5$
b. $5 \leq 5$
c. $5 \geq 5$
d. $7 \leq 5$
e. $7 \geq 9$
f. $2 < 3 < 4$
g. $2 < 3 < 1$
h. $2 = 2 \vee 2 = 3$
i. $2 = 2 \wedge 2 = 3$
j. $2 = 2 \vee 3 = 3$
k. $2 = 2 \wedge 3 = 3$
l. $2 = 3 \vee 2 = 5$
m. $2 \leq 4 \wedge 4 \geq 2$
n. $2 \leq 2 \wedge 2 < 2$

20. Als opgave 19.

a. $2 = 2 \wedge 2 = 3 \vee 3 \leq 3$
b. $2 = 2 \wedge (2 = 3 \vee 3 \leq 3)$
c. $2 = 2 \vee 2 = 3 \wedge 3 \leq 3$
d. $2 = 2 \vee (2 = 3 \wedge 3 \leq 3)$
e. $(-2 \in \mathbb{N} \vee -3 \in \mathbb{Q}) \vee (-2 \in \mathbb{Z} \wedge \pi \in \mathbb{Q})$
f. $(-2 \in \mathbb{N} \wedge -3 \in \mathbb{Q}) \wedge (-2 \in \mathbb{Z} \wedge \pi \in \mathbb{Q})$
g. $(-2 \in \mathbb{N} \vee -3 \in \mathbb{Q}) \wedge (-2 \in \mathbb{Z} \wedge \pi \in \mathbb{Q})$
h. $(-2 \in \mathbb{N} \wedge -3 \in \mathbb{Q}) \vee (-2 \in \mathbb{Z} \vee \pi \in \mathbb{Q})$

21. Als opgave 19.

a. $(2 \in \mathbb{N}) \wedge (2 \in \mathbb{Z}) \wedge (2 = 3)$
b. $(2 \in \mathbb{N}) \vee (2 \in \mathbb{Z}) \wedge (2 = 3)$
c. $(2 \in \mathbb{N}) \vee ((2 \in \mathbb{Z}) \vee (2 = 3))$
d. $(2 \in \mathbb{N}) \wedge (2 \in \mathbb{Z}) \vee (2 = 3)$
e. $((2 = 3) \wedge (2 < 3)) \vee ((2 \in \mathbb{R}) \wedge (0 \in \mathbb{Z}^+))$

22. Bepaal van elk van de volgende voorwaarden of ze onwaar of waar zijn als voor x het getal 3 gekozen wordt.

a. $x = 2$
b. $x \leq 3$
c. $x = 2 \wedge x \leq 3$
d. $x = 2 \vee x \leq 3$
e. $x = 2 \wedge x \leq 3 \vee x = 1$
f. $x = 2 \wedge (x \leq 3 \vee x = 1)$
g. $x = 2 \vee x \leq 3 \wedge x = 1$
h. $x = 2 \vee (x \leq 3 \vee x = 1)$
i. $x = 2 \wedge x \leq 3 \wedge x = 1$

23. Als opgave 22 waarbij voor x het getal 2 gekozen wordt.

24. Als opgave 22 waarbij voor x het getal 1 gekozen wordt.

25. Noteer de volgende verzamelingen door middel van opsomming van de elementen.

a. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5 \wedge x > 1\}$
b. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -3 \wedge x < 4\}$
c. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5 \vee x < 7\}$
d. $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x < 6 \vee x \leq 7) \wedge x > -3\}$
e. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > -2 \wedge (x < 4 \wedge x < 3)\}$
f. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > -2 \wedge (x < 4 \vee x < 3)\}$
g. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = -1 \vee x = 1\}$
h. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = -1 \wedge x = 1\}$

26. Noteer de verzameling $\{x \in \mathbb{N} \mid (36 : x) \in \mathbb{N}\}$ door middel van opsomming van de elementen.
Hoe heet deze verzameling?

27. Beantwoord de vragen van opgave 26 voor de verzameling $\{x \in \mathbb{N} \mid (x : 5) \in \mathbb{N}\}$.

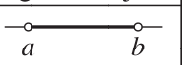
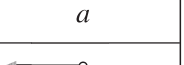
28. Beantwoord de vragen van opgave 26 voor de verzameling $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ heeft precies 2 verschillende delers$\}$.

1.7 Intervallen

interval

Een *interval* is een aaneengesloten deelverzameling van $\mathbb{R}$.
Hoewel een interval ook met de notatie door middel van voorwaarde is weer te geven, bestaat hiervoor een speciale kortere notatie, de zogeheten intervalnotatie.
In de volgende tabel zien we de voorwaardenotatie, de intervalnotatie, een afbeelding van het betreffende interval op de getallenlijn en de naam van het interval.
a en b zijn elementen van $\mathbb{R}$; $a < b$.

Tabel 1.1

Naam van het interval	Voorwaardenotatie	interval-notatie	interval op de getallenlijn
open	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a \wedge x < b\}$ of $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$\langle a, b\rangle$	
gesloten	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \wedge x \leq b\}$ of $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
links open, rechts gesloten	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a \wedge x \leq b\}$ of $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$\langle a, b]$	
links gesloten, rechts open	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \wedge x < b\}$ of $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b\rangle$	
links open	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$\langle a, \rightarrow\rangle$	
links gesloten	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, \rightarrow\rangle$	
rechts open	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$\langle \leftarrow, a\rangle$	
rechts gesloten	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$\langle \leftarrow, a]$	

In de intervalnotatie is de betekenis van de symbolen de volgende:
$\langle$ betekent: de linkergrens behoort niet tot het interval.
$[$ betekent: de linkergrens behoort tot het interval.
$\rangle$ betekent: de rechtergrens behoort niet tot het interval.
$]$ betekent: de rechtergrens behoort tot het interval.
$\leftarrow$ betekent: er is geen linkergrens.
$\rightarrow$ betekent: er is geen rechtergrens.

In de weergave van een interval op de getallenlijn betekent een open rondje dat het bij dat grenspunt behorend getal geen element is van het interval en een gesloten rondje dat het getal wel een element is van het interval.

Intervallen zijn verzamelingen. De bewerkingen 'doorsnede', 'vereniging' en 'verschil' kunnen dus in combinatie met intervallen gebruikt worden. Let hierbij op de grenzen!

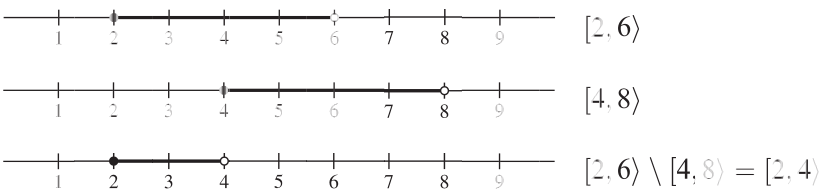
Voorbeelden

$\langle 2,6\rangle \cap \langle 4,8\rangle = \langle 4,6\rangle$
$\langle 2,6] \cap \langle 4,8\rangle = \langle 4,6]$
$\langle 2,6] \cap [6,8\rangle = \{6\}$
$\langle 2,6] \cap \langle 6,8\rangle = \emptyset$
$\langle \leftarrow,6\rangle \cap \langle 2,\rightarrow\rangle = \langle 2,6\rangle$

$\langle 2,6\rangle \cup \langle 4,8\rangle = \langle 2,8\rangle$
$[2,6\rangle \cup \langle 4,8\rangle = [2,8\rangle$
$\langle \leftarrow,6\rangle \cup \langle 2,\rightarrow\rangle = \mathbb{R}$

$\langle 2,6\rangle \setminus \langle 4,8\rangle = \langle 2,4]$
$[2,6\rangle \setminus [4,8\rangle = [2,4\rangle$

Bewerkingen met intervallen kunnen zichtbaar gemaakt worden door de intervallen op onder elkaar gelegen getallenlijnen te tekenen en het resultaat van de bewerking op een getallenlijn daar weer onder. Dit wordt gedemonstreerd met het laatste voorbeeld.



Figuur 1.8 Intervallen op de getallenlijn

Opmerking 1

$[2,5] = \{2,3,4,5\}$?

Nee, want de verzameling $[2,5]$ heeft als elementen alle getallen tussen 2 en 5, inclusief 2 en 5 zelf. $[2,5]$ heeft dus onbeperkt veel elementen, terwijl $\{2,3,4,5\}$ slechts 4 elementen heeft.
Dus $[2,5] \neq \{2,3,4,5\}$.

Opmerking 2

De verzameling $\mathbb{R}$ kan in de intervalnotatie weergegeven worden als $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$. Gebruikelijk is dit echter niet.

Opgaven

29. Teken elk van de volgende intervallen op de getallenlijn:

a. $[1,4]$
b. $[-2,3\rangle$
c. $\langle 2, \rightarrow \rangle$
d. $\langle 1,4 \rangle$
e. $\langle -2,4]$
f. $\langle \leftarrow, 1 \rangle$

30. Geef van elk van de volgende verzamelingen de opsommingsnotatie:

a. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \in [1,4]\}$
b. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \in [-2,3\rangle\}$
c. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \in \langle 1,4 \rangle\}$
d. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \in \langle -2,4]\}$

31. Schrijf elk van de volgende verzamelingen in intervalnotatie:

a. $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 2\}$
b. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x < 5\}$
c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4 \wedge x \geq -3\}$
e. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

32. $A = \langle -5,3]$; $B = \langle 2,6 \rangle$; $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in A\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in B\}$

a. Geef C en D door opsomming van de elementen.
b. Geef $C \cap D$ en $C \cup D$ door opsomming van de elementen.
c. Noteer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ en $B \setminus A$ als één interval.

33. Noteer als één interval:

a. $[1,3\rangle \cap \langle 2,5]$
b. $[1,3] \cap \langle 2,5]$
c. $[1,3\rangle \cap [2,\rightarrow\rangle$
d. $\langle\leftarrow,3] \cap [2,\rightarrow\rangle$
e. $[1,3\rangle \setminus \langle 2,5]$
f. $[1,3] \setminus \langle 2,5\rangle$
g. $[1,3\rangle \setminus [2,5\rangle$
h. $\langle\leftarrow,3] \setminus [2,\rightarrow\rangle$

34. Welke van de volgende beweringen zijn waar?

a. $\langle\leftarrow,0\rangle = \mathbb{Z}^-$
b. $[0,\rightarrow\rangle = \mathbb{Q}^+$
c. $\langle\leftarrow,0\rangle \cup \langle 0,\rightarrow\rangle = \mathbb{R}$
d. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \langle\leftarrow,0\rangle$
e. $[2,3] \subset \langle 2,3\rangle$
f. $\langle 2,3\rangle \subset \{2,3\}$
g. $2\frac{1}{2} \in \langle 0,3]$
h. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+ = \langle\leftarrow,0\rangle$

35. Noteer zo mogelijk als één interval:

a. $\langle -3,2\rangle \setminus [0,2\rangle \cup [-4,-1\rangle$
b. $\langle 0,5\rangle \setminus [0,2\rangle \cap \langle 3,\rightarrow\rangle$
c. $\langle -3,2] \setminus \langle -3,0] \cap \langle\leftarrow,0]$
d. $[-3,6\rangle \setminus [3,6] \cap \langle\leftarrow,6]$

2 Elementair rekenen

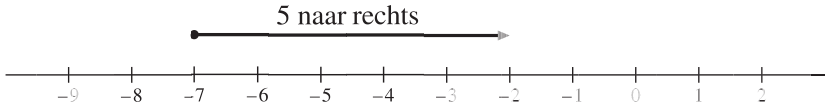
Rekenen doen we tegenwoordig met een calculator. Echter de rekentechnieken zijn de calculator niet, of slechts ten dele, bekend. Voor een handig gebruik van de calculator is het noodzakelijk met deze technieken op de hoogte te zijn.
Een tweede, belangrijker reden om de rekentechnieken te beheersen, ligt in het feit dat ze in formules, waar met variabelen (letters) gerekend wordt, bekend worden verondersteld.
In dit hoofdstuk wordt het basisschoolrekenwerk dat wil zeggen het rekenen met positieve getallen bekend verondersteld. Het rekenen met breuken wordt kort samengevat.

2.1 Optellen en aftrekken in $\mathbb{Z}$

Optellen van positieve getallen kunnen we voorstellen door op de getallenlijn naar rechts te gaan.

Voorbeeld

$-7 + 5 = -2$

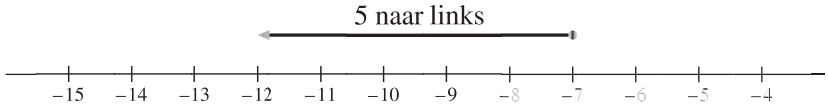


Figuur 2.1 Optellen van een positief getal

Aftrekken van positieve getallen kunnen we voorstellen door op de getallenlijn naar links te gaan.

Voorbeeld

$-7 - 5 = -12$



Figuur 2.2 Aftrekken van een positief getal

Optellen en aftrekken van negatieve getallen kunnen we vervangen door het respectievelijk aftrekken en optellen van positieve getallen.

Voorbeelden

$-7 + (-5) = -7 - 5 = -12$
$-7 - (-5) = -7 + 5 = -2$
Ook geldt:
$-7 + (+5) = -7 + 5 = -2$
$-7 - (+5) = -7 - 5 = -12$

Uit deze voorbeelden kunnen we de volgende regel destilleren:

✓ gelijke tekens leveren '+'; ongelijke tekens leveren '−'

tegengesteld De getallen 5 en -5 noemen we *tegengesteld.*
Algemeen: twee getallen zijn tegengesteld als hun som 0 is.

som, verschil De *som* van twee getallen a en b is $a + b$ (en het *verschil* van twee getallen a en b is $a - b$).

Het basisschool-rekenen beperkt zich tot het rekenen met niet-negatieve getallen. Niet-negatief is niet hetzelfde als positief want 0 is niet negatief, maar 0 is ook niet positief. 0 noemen we neutraal.
Optellingen en aftrekkingen met een negatief antwoord kunnen we uitvoeren door het tegengestelde te berekenen. Dit demonstreren we aan de getallen 5 en 7.

Voorbeelden

$5 - 7$
Het tegengestelde van $5 - 7$ is $7 - 5 = 2$
Dus $5 - 7 = -2$

$-5 - 7$
Het tegengestelde van $-5 - 7$ is $5 + 7 = 12$
Dus $-5 - 7 = -12$

$-7 + 5$
Het tegengestelde van $-7 + 5$ is $7 - 5 = 2$
Dus $-7 + 5 = -2$

Optellen en aftrekken hebben geen onderlinge prioriteit. Een vorm wordt daarom van links naar rechts uitgewerkt tenzij er haken staan; in dat geval

wordt de vorm tussen haken eerst uitgewerkt. Staan binnen haken weer haken, dan wordt de binnenste vorm eerst uitgewerkt.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} -12-(-14+(16-20)) &= -12-(-14+(-4)) \\ &= -12-(-14-4) \\ &= -12-(-18) \\ &= -12+18 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Opgaven

1. Bereken zonder gebruik van de calculator:

   a. $15-17$
   b. $22-32$
   c. $101-202$
   d. $-199+101$
   e. $233+123$
   f. $-313+134$

2. Als opgave 1.

   a. $-34+44$
   b. $-52+71$
   c. $-101+203$
   d. $-199+201$
   e. $-234+234$
   f. $-234+133$

3. Als opgave 1.

   a. $-15-17$
   b. $-22-32$
   c. $-101-202$
   d. $-17-15$
   e. $-32-22$
   f. $-202-101$

4. Als opgave 1.

   a. $25-36$
   b. $-25+36$
   c. $-25-36$
   d. $-36-25$
   e. $-2-3-5$
   f. $-2+3-5$
   g. $2-3-5$
   h. $-2-3+5$
   i. $-7+3-5+4$
   j. $3-4+5-16$
   k. $-1-2-3+6$
   l. $-11-12+2-10$
   m. $13-20+5-12$
   n. $-13+20-5+12$
   o. $11-13-15+17$
   p. $-11+13-15+17$

5. Als opgave 1.

a. $13-(-17)$
b. $13-(+17)$
c. $-(-13)-(-17)$
d. $-(-13)+(-17)$
e. $-22+(-13)-(-15)$
f. $16-(-32)+16$
g. $16+(-32)+16$
h. $-(-1)+(-2)-(-3)+(-4)-(-5)$

6. Als opgave 1.

a. $-7-3-5+4$
b. $-7-3-(5+4)$
c. $-7-(3-5)+4$
d. $-7-((3-5)+4)$
e. $-(7-((3-5)+4))$
f. $-(7-3)-(5+4)$
g. $-((7-3)-(5+4))$
h. $-7-(3-5+4)$

7. Bereken met de calculator:

a. $-12\,345\ -23\,456$
b. $-12\,345\ +23\,456$
c. $-12\,345\ +23\,456\ -34\,567$
d. $-12\,345\ -23\,456\ +34\,567$
e. $-12\,345\ -(23\,456+34\,567)$
f. $-(12\,345-23\,456\ -34\,567)$
g. $-(12\,345-(23\,456-34\,567))$
h. $-(12\,345-23\,456)-34\,567$

2.2 Vermenigvuldigen en delen in $\mathbb{Z}$

Vermenigvuldigen kan worden opgevat als herhaald optellen.
Bijvoorbeeld: $3\times 2=2+2+2=6$.
Zo is $3\times(-2)=(-2)+(-2)+(-2)=-2-2-2=-6$.

Onder $(-3)\times 2$ verstaan we het tegengestelde van 3×2.
Dus $(-3)\times 2=-6$.

Onder $(-3)\times(-2)$ verstaan we het tegengestelde van $3\times(-2)$.
Dus $(-3)\times(-2)=6$.

We zien hier de volgende regel:
Bij vermenigvuldiging van 2 getallen leveren getallen met gelijk teken een positief antwoord op en getallen met ongelijk teken een negatief antwoord.